ECOLE POLYTECHNIQUE 1982 OPTION M' et P'

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 heures)

Soit E un espace vectoriel euclidien réel de dimension finie au moins égale à 3. Dans tout le problème, on fixe un vecteur unitaire k de E et on note V le sous-espace de E engendré par k , H le sous-espace orthogonal à V , s la symétrie orthogonale par rapport à V et p le projecteur orthogonal de E sur H . Enfin, pour tout couple $(x, y) \in E^2$, $x \cdot y$ désigne le produit scalaire de x et y.

I

1 - *a.* Montrer que la forme bilinéaire B définie sur E^2 par $B(x, y) = x \cdot s(y)$ est symétrique et non dégénérée.

Dans toute la suite du problème, C et P désignent les ensembles

$$C = \{ x \in E \mid B(x, x) = 0 \} \quad ; \quad P = \{ x \in E \mid B(x, x) > 0 \text{ et } x \cdot k > 0 \} .$$

b. Montrer que si u et x appartiennent à P, alors $B(u, x) > 0$.

2 - On considère deux points $u \in P$ et $x \in E$.

a. Dans le cas où $B(u, x) = 0$, montrer que $B(x, x) \leq 0$ et préciser quels points x de C vérifient la condition $B(u, x) = 0$.

b. Pour (u, x) fixé dans $P \times E$, montrer que l'intersection de C avec l'ensemble des points $x + \lambda u$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) est constitué de deux points, sauf dans un cas qu'on précisera.

c. Etablir que la forme quadratique $x \mapsto B^2(u, x) - B(u, u) B(x, x)$ ne prend pas de valeurs strictement négatives. Quels sont les points $x \in E$ qui l'annulent ?

II

On se propose dans cette partie d'étudier une application bilinéaire symétrique de E^2 dans E , notée $(x, y) \mapsto x * y$, et vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) pour tout endomorphisme orthogonal f de E , tel que $f(k) = k$, et tout $(x, y) \in E^2$, $f(x * y) = f(x) * f(y)$;

(ii) pour tout vecteur unitaire $i \in H$, $i * i$ est unitaire et appartient à P ;

(iii) pour tout $x \in E$, $k * x = x$.

1 - *a.* Soit $(x, y) \in H^2$; calculer $s(x * y)$ et en déduire $x * y$.

b. Soit $(x, y) \in E^2$; calculer $x * y$ sous forme d'une combinaison linéaire de k , x et y en exprimant les cœfficients de cette combinaison linéaire à l'aide de valeurs de B . Quel résultat obtient-on dans le cas particulier où $y = s(x)$?

2 - *a.* Pour u fixé dans E , résoudre l'équation $u * x = O$ et discuter les divers cas obtenus selon la valeur de u .

b. Pour u fixé dans E , résoudre l'équation $u * x = k$ et discuter le nombre des solutions x selon la valeur de u .

c. *Dans toute la suite du problème*, pour tout élément u du complémentaire de C dans E , on pose $u^{-1} = \dfrac{s(u)}{B(u, u)}$. Calculer $u * u^{-1}$ et $(u^{-1})^{-1}$.

Montrer que la restriction à P de l'application $u \mapsto u^{-1}$ est une application bijective de P sur lui-même.

3 - Pour u fixé dans E, résoudre l'équation $x * x = u$ et discuter le nombre des solutions x selon la valeur de u .

.../...

III

1 - Pour u fixé dans E , on définit l'endomorphisme g_u de E par

$$x \mapsto g_u(x) = 2u * (u * x) - (u * u) * x .$$

Vérifier que pour tout $x \in E$

$$g_u(x) = 2(u.x)u - B(u,u)s(x) .$$

2 - Trouver, en discutant selon la valeur de u , les valeurs propres de g_u et les sous-espaces propres associés.

3 - ***a.*** Pour quelles valeurs de u l'endomorphisme g_u est-il inversible ?

b. Si u appartient au complémentaire de C dans E , comparer $u.x$ et $u^{-1}.g_u(x)$ pour tout $x \in E$, puis comparer $g_{u^{-1}}$ et l'endomorphisme g_u^{-1} inverse de g_u.

Calculer $B\left(g_u(x), g_u(x)\right)$ en fonction de $B(u,u)$ et $B(x,x)$ et montrer que la restriction de g_u à P est une application bijective de P sur lui-même.

IV

Dans cette partie, on se donne un couple $(u,x) \in P \times E$ et on cherche les applications φ de $\mathbb{R}$ dans P telles que $\varphi(0) = u$, $\varphi'(0) = x$ et vérifiant l'équation différentielle

$$(D) \qquad \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = g_{\frac{d\varphi(t)}{dt}}\left(\varphi(t)^{-1}\right).$$

1 - Montrer qu'une telle application φ doit vérifier aussi l'équation différentielle

$$(D_1) \qquad B(u,u)\frac{d^2y}{dt^2} - 2B(u,x)\frac{dy}{dt} + B(x,x)y = 0 .$$

2 - ***a.*** Montrer que l'équation (D_1) admet une solution ψ définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans E ,telle que $\psi(0) = u$ et $\psi'(0) = x$, et qu'une telle solution est unique.

b. Etablir que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$B\left(\psi(t), \psi(t)\right) = B(u,u)e^{2\alpha t}$$

où α est une constante réelle qu'on calculera en fonction de u et de x .

c. Montrer que ψ est l'unique solution φ du problème posé dans le préambule de cette partie IV . *On notera désormais φ cette solution* .

3 - Quelle condition doit vérifier x pour que $\varphi''(t)$ appartienne à P pour tout $t \in \mathbb{R}$?

4 - Montrer que l'image de $\mathbb{R}$ par φ dans P est plane et étudier ses points d'inflexion éventuels.

5 - ***a.*** Les zéros de l'équation caractéristique de l'équation différentielle linéaire (D_1) sont-ils réels ? Dans l'affirmative, on les désignera par ω_1 et ω_2 , avec $\omega_1 \leq \omega_2$.

b. Résoudre l'équation (D) sous les conditions $\varphi(0) = u$, $\varphi'(0) = x$ données au début de cette partie IV , et discuter, selon les signes de $B(x,x)$ et de $B(u,x)$, l'allure de l'image de $\mathbb{R}$ par φ dans P , en précisant notamment ses branches infinies éventuelles.

-FIN-

Pour la section P' étaient supprimées les questions II 2a, II 3 et IV 3.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail